УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.718

О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ В ПОЛНЫХ БАЗИСАХ, СОДЕРЖАЩИХ ФУНКЦИЮ ГОЛОСОВАНИЯ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.В. Чугунова

Аннотация

Рассмотрена реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов, подверженных инверсным неисправностям на входах с вероятностью ошибки ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, на каждом входе функционального элемента. Показано, что если к каждому из неприводимых полных базисов, содержащих функции, зависящие не более чем от двух переменных, добавить функцию голосования, то во всех полученных базисах оценка ненадежности асимптотически оптимальных по надежности схем равна $3\varepsilon^2$ (при $\varepsilon \to 0$) для всех булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за исключением констант 0, 1 и функций x_i, $\bar{x}_i$, где $i = 1, \ldots, n$.

Ключевые слова: булевы функции, асимптотически оптимальные по надежности схемы.

Введение

Пусть $\widetilde{P}_2$ – множество всех булевых функций. Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисах, содержащих функции, зависящие не более чем от двух переменных. Будем считать, что схема из функциональных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\widetilde{x})$, если при поступлении на входы схемы набора $\widetilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\widetilde{a})$. Число входов функциональных элементов равно числу существенных переменных функций, приписанных этим элементам, то есть каждый функциональный элемент имеет не более двух входов. Предполагается, что каждый вход элемента схемы независимо от всех других входов элементов с вероятностью ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, подвержен инверсным неисправностям. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на вход элемента значение a, $a \in \{0, 1\}$, с вероятностью ε может превратиться в значение $\bar{a}$. Заметим, что элементы, реализующие константы 0 и 1, являются абсолютно надежными при инверсных неисправностях на входах элементов.

Пусть $P_{\bar{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\widetilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\widetilde{x})$ при входном наборе $\widetilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\widetilde{a}$. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Обозначим $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где S – схема из ненадежных элементов, реализующая булеву функцию f. Схему A из ненадежных элементов, реализующую булеву функцию f, назовем асимптотически оптимальной (наилучшей) по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим множество попарно неконгруэнтных булевых функций, зависящих (возможно, фиктивно) от двух переменных x_1, x_2, через

$$M(x_1,x_2) = \\ = \{x_1\&x_2, x_1 \vee x_2, x_1|x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2, x_1 \sim x_2, x_1 \oplus x_2, x_1, \bar{x}_1, 0, 1\}.$$

Множество $B \subset M(x_1,x_2)$ назовем неприводимым полным базисом в $\widetilde{P}_2$, если множество B полно и никакое его собственное подмножество полным не является.

Известно, что в $\widetilde{P}_2$ существует 17 (с точностью до переименования переменных) неприводимых полных базисов, содержащих функции, зависящие не более чем от двух переменных: $B_1 - B_{17}$ (см. табл. 1).

Любой другой базис, отличный от базисов $B_1 - B_{17}$, можно получить переименованием переменных без отождествления, а также добавлением одной или нескольких неконстантных, отличных от x_1, функций из множества $M(x_1,x_2)$ к некоторому базису из указанного списка (например, $B_{18} = \{x_1\&x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$).

Асимптотические оценки ненадежности схем из функциональных элементов для неприводимых полных базисов $B_1 - B_{17}$, а также для приводимого полного базиса B_{18} и базиса M, содержащего все булевы функции, зависящие не более чем от двух переменных, получены ранее [1, 2] (доказаны теоремы 1 и 2).

Пусть базис B – один из перечисленных в предыдущем абзаце базисов, тогда для него справедливы теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть константы a, b, c, d (см. табл. 1) соответствуют базису B и $\varepsilon \in (0,d]$. Тогда любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ в базисе B можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \le a\varepsilon + b\varepsilon^2$.*

Теорема 2. *Пусть константы a, $\widehat{b}$, $\widehat{d}$ и класс булевых функций $K(n)$ (см. табл. 1) соответствуют базису B. Тогда для любой булевой функции $f(\widetilde{x})$, $f \notin K(n)$, и любой схемы S, реализующей f в базисе B, при $\varepsilon \in (0,\widehat{d}]$ верно неравенство $P(S) \ge a\varepsilon + \widehat{b}\varepsilon^2$, причем a – такая же константа, что и в теореме 1.*

Используемые в таблице обозначения: $i = 1,\ldots,n$, $\delta,\mu \in \{0,1\}$, $h(\widetilde{x})$ – произвольная булева функция от переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Из теоремы 2 следует, что схемы, построенные при доказательстве теоремы 1, являются асимптотически оптимальными по надежности для почти всех функций.

При доказательстве теорем 1 и 2 для повышения надежности схем, реализующих булевы функции, в каждом из базисов использовались схемы, построенные только из ненадежных базисных элементов. Возникает вопрос: изменятся ли найденные оценки, если к каждому из базисов $B_1 - B_{18}$ и базису M добавить еще один ненадежный элемент – элемент голосования, подверженный также инверсным неисправностям на входах? Можно ли с помощью элемента голосования повысить надежность построенных схем? Ответы на эти вопросы получены в настоящей статье.

Найдем асимптотические оценки оптимальных по надежности схем, реализующих произвольные булевы функции в каждом из базисов, полученных из базисов $B_1 - B_{18}$ и M добавлением функции голосования.

Пусть B' – один из базисов $B_1 - B_{18}$ или M, к которому добавили функцию голосования $g(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

Найдем верхние оценки ненадежности схем в базисе B'.

Табл. 1

B	a	b	d	$\widehat{b}$	$\widehat{d}$	$K(n)$
$B_1 = \{x_1 \vert x_2\}$	2	19	1/100	−1	1/4	$x_i, 1$
$B_2 = \{x_1 \downarrow x_2\}$	2	19	1/100	−1	1/4	$x_i, 0$
$B_3 = \{x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$	2	51	1/300	−1	1/4	$x_i, 0, 1$
$B_4 = \{x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/4	$x_i, 1$
$B_5 = \{x_1 \not\to x_2, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/4	$x_i, 0$
$B_6 = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \& x_2, 1\}$	2	67	1/200	−2	1/4	$x_i, 0, 1$
$B_7 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \vee x_2, 0\}$	2	67	1/200	−2	1/4	$x_i, 0, 1$
$B_8 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	62	1/300	−2	1/4	$x_i, 0$
$B_9 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	62	1/300	−2	1/4	$x_i, 1$
$B_{10} = \{x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, 0\}$	2	66	1/200	−2	1/4	$x_i, 0$
$B_{11} = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \vee x_2, 1\}$	2	66	1/200	−2	1/4	$x_i, 1$
$B_{12} = \{x_1 \not\to x_2, \bar{x}_1\}$	3	41	1/150	−6	1/6	$x_i^\delta \& h(\widetilde{x}), 1$
$B_{13} = \{x_1 \to x_2, \bar{x}_1\}$	3	41	1/150	−6	1/6	$x_i^\delta \vee h(\widetilde{x}), 0$
$B_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1\}$	4	59	1/200	−8	1/11	$(x_i^\delta \& h(\widetilde{x}))^\mu$
$B_{15} = \{x_1 \to x_2, 0\}$	4	59	1/200	−8	1/11	$(x_i^\delta \& h(\widetilde{x}))^\mu$
$B_{16} = \{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$	4	83	1/200	−12	1/10	$(x_i^\delta \& h(\widetilde{x}))^\mu$
$B_{17} = \{x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$	4	83	1/200	−12	1/10	$(x_i^\delta \& h(\widetilde{x}))^\mu$
$B_{18} = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$	2	19	1/150	−2	1/6	$x_i, \bar{x}_i, 0, 1$
$M = \{x_1 \vert x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1,$ $x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2, x_1 \sim x_2, x_1 \oplus x_2, 0, 1\}$	2	19	1/100	−2	1/6	$x_i, \bar{x}_i, 0, 1$

1. Верхние оценки ненадежности схем

Рассмотрим вспомогательную лемму, необходимую для поиска верхней оценки ненадежности схем в базисе B'.

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/2]$, $f(\widetilde{x})$ *– произвольная функция,* S *– схема, реализующая функцию* $f(\widetilde{x})$ *с ненадежностью* $P(S)$ *в базисе* B'. *Тогда в базисе* B' *можно построить схему* $\varphi(S)$, *реализующую функцию* $f(\widetilde{x})$ *с ненадежностью* $P(\varphi(S)) \leq 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon P(S) + 3P^2(S)$.

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ – произвольная булева функция, а S – схема, реализующая $f(\widetilde{x})$ в базисе B'. По схеме S построим схему $\varphi(S)$ следующим образом: возьмем три экземпляра схемы S и соединим выход каждой схемы S с соответствующим входом элемента голосования G.

Пусть $\widetilde{a}$ – входной набор функции $f(\widetilde{x})$. Вычислим вероятности ошибок на выходе схемы $\varphi(S)$.

1. При нулевых входных наборах $\widetilde{a}$ функции $f(\widetilde{x})$ ($f(\widetilde{a}) = 0$):

$$\begin{aligned} P_1(\varphi(S), \widetilde{a}) = (1 - P_1(S, \widetilde{a}))^3 (3\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3) + \\ + 3(1 - P_1(S, \widetilde{a}))^2 P_1(S, \widetilde{a})(2\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2(1-\varepsilon)) + \\ + 3(1 - P_1(S, \widetilde{a})) P_1^2(S, \widetilde{a})((1-\varepsilon)^3 + 2(1-\varepsilon)\varepsilon^2 + \varepsilon(1-\varepsilon)^2) + \\ + P_1^3(S, \widetilde{a})((1-\varepsilon)^3 + 3(1-\varepsilon)^2\varepsilon) \leq 3\varepsilon^2 + 6P_1(S, \widetilde{a})\varepsilon + 3P_1^2(S, \widetilde{a}) \quad \text{при} \ \ \varepsilon \in (0, 1/2]. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\varepsilon \in (0, 1/2]$

$$P_1(\varphi(S), \widetilde{a}) \leq 3\varepsilon^2 + 6P_1(S, \widetilde{a})\varepsilon + 3P_1^2(S, \widetilde{a}). \tag{1}$$

2. При единичных входных наборах $\widetilde{a}$ функции $f(\widetilde{x})$ ($f(\widetilde{a}) = 1$):

$$\begin{aligned}P_0(\varphi(S), \widetilde{a}) = (1 - P_0(S, \widetilde{a}))^3(3\varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3) + \\ + 3(1 - P_0(S, \widetilde{a}))^2 P_0(S, \widetilde{a})(2\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2(1-\varepsilon)) + \\ + 3(1 - P_0(S, \widetilde{a}))P_0^2(S, \widetilde{a})((1-\varepsilon)^3 + 2(1-\varepsilon)\varepsilon^2 + \varepsilon(1-\varepsilon)^2) + \\ + P_0^3(S, \widetilde{a})((1-\varepsilon)^3 + 3(1-\varepsilon)^2\varepsilon) \le 3\varepsilon^2 + 6P_0(S, \widetilde{a})\varepsilon + 3P_0^2(S, \widetilde{a}) \quad \text{при} \ \ \varepsilon \in (0, 1/2].\end{aligned}$$

Следовательно, при $\varepsilon \in (0, 1/2]$

$$P_0(\varphi(S), \widetilde{a}) \le 3\varepsilon^2 + 6P_0(S, \widetilde{a})\varepsilon + 3P_0^2(S, \widetilde{a}). \tag{2}$$

Пусть $P(S) = \max\{P_1(S, \widetilde{a}), P_0(S, \widetilde{a})\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\widetilde{a}$ схемы S. Учитывая неравенства (1) и (2), получим:

$$P(\varphi(S)) \le 3\varepsilon^2 + 6P(S)\varepsilon + 3P^2(S) \quad \text{при} \ \ \varepsilon \in (0, 1/2].$$

Лемма доказана. □

Теорема 3. *При $\varepsilon \in (0, 1/300]$ любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ в базисе B' можно реализовать такой схемой $\widetilde{S}$, что $P(\widetilde{S}) \le 3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3$.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ в базисе B можно реализовать такой схемой S, ненадежность которой $P(S) \le 4\varepsilon + 83\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

В базисе B' найденную оценку можно улучшить. Применяя лемму 1, по схеме S построим схему $\varphi(S)$ (для этого возьмем три экземпляра схемы S и соединим выход каждой из них с соответствующим входом элемента голосования), ненадежность которой $P(\varphi(S)) \le 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon(4\varepsilon + 83\varepsilon^2) + 3(4\varepsilon + 83\varepsilon^2)^2 \le 85\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$. Применяя лемму 1 еще раз, по схеме $\varphi(S)$ построим схему $\varphi^2(S)$ (для этого возьмем три экземпляра схемы $\varphi(S)$ и соединим выход каждой из них с соответствующим входом элемента голосования), для которой $P(\varphi^2(S)) \le 3\varepsilon^2 + 510\varepsilon^3 + 21675\varepsilon^4 \le 5\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$. На четвертом шаге итерации построим схему $\varphi^3(S)$, ненадежность которой $P(\varphi^3(S)) \le 3\varepsilon^2 + 31\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$. По схеме $\varphi^3(S)$ построим схему $\varphi^4(S)$, реализующую $f(\widetilde{x})$, с ненадежностью $P(\varphi^4(S)) \le 3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$. Схема $\varphi^4(S)$ искомая, то есть $\widetilde{S} = \varphi^4(S)$. Теорема доказана. □

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Константу 1 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1|x_2\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \le \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

По теореме 3 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1|x_2\}$ можно построить схему S_1, реализующую константу 0, с ненадежностью: $P(S_1) \le 3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Построим схему S_2, реализующую константу 1. Для этого возьмем два экземпляра схемы S_1, выходы которых соединим с входами функционального элемента, реализующего функцию штрих Шеффера. Вероятность ошибки на выходе схемы S_2 удовлетворяет неравенству

$$P(S_2) \le \varepsilon^2 + (3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3)^2(1-2\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3)(1-2\varepsilon) \le \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 \quad \text{при} \ \varepsilon \in (0, 1/300].$$

Схема S_2 является искомой схемой A.

Пример 2. Константу 1 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \le \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

По теореме 3 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$ можно построить схему S_1, реализующую константу 1, с ненадежностью $P(S_1) \leq 3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$ и схему S_2, реализующую константу 0, с ненадежностью $P(S_2) \leq 3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Построим схему S_3, реализующую константу 1. Для этого возьмем импликатор, первый вход которого соединим с выходом схемы S_2, а второй – схемы S_1. Вычислим вероятность ошибки на выходе построенной схемы S_3. Она удовлетворяет неравенству

$$P(S_3) \leq \varepsilon^2 + (3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3)^2(1-2\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3)(1-2\varepsilon) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 \text{ при } \varepsilon \in (0, 1/300].$$

Схема S_3 является искомой схемой A.

Пример 3. Константу 0 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Используем схемы S_1 и S_2 из примера 2 для построения схемы S_3, реализующей константу 0: возьмем антиимпликатор, первый вход которого соединим с выходом схемы S_2, а второй – схемы S_1. Вычислим вероятность ошибки на выходе построенной схемы S_3. Она удовлетворяет неравенству

$$P(S_3) \leq \varepsilon^2 + (3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3)^2(1-2\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3)(1-2\varepsilon) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 \text{ при } \varepsilon \in (0, 1/300].$$

Схема S_3 является искомой схемой A.

Пример 4. Константу 1 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Доказательство такое же, как и в примере 2.

Пример 5. Константу 0 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \oplus x_2, x_1\&x_2, 1\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/36]$.

По теореме 3 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \oplus x_2, x_1\&x_2, 1\}$ можно построить схему S_1, реализующую константу 0, с ненадежностью $P(S_1) \leq 3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$

Возьмем два экземпляра схемы S_1 и соединим их выходы с входами конъюнктора, получим схему S_2. Ненадежность построенной схемы S_2 удовлетворяет неравенству

$$P(S_2) \leq \varepsilon^2 + (3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3)^2(1-2\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3)(1-2\varepsilon) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, 1/300].$$

Схема S_2 является искомой схемой A.

Пример 6. Константу 0 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \sim x_2, x_1\&x_2, x_1 \oplus x_2\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Доказательство проводим, как в примере 5.

Пример 7. Константу 1 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, \bar{x}_1\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Доказательство такое же, как и в примере 2.

Пример 8. Константу 1 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, 0\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Доказательство такое же, как и в примере 2.

Пример 9. Константу 1 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

По теореме 3 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ можно построить схему S_1, реализующую константу 1, с ненадежностью $P(S_1) \leq 3\varepsilon^2 + 19\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Возьмем два экземпляра схемы S_1 и соединим их выходы с входами дизъюнктора, получим схему S_2. Ненадежность построенной схемы S_2 удовлетворяет неравенству

$$P(S_2) \leq \varepsilon^2+(3\varepsilon^2+19\varepsilon^3)^2(1-2\varepsilon)^2+2\varepsilon(3\varepsilon^2+19\varepsilon^3)(1-2\varepsilon) \leq \varepsilon^2+7\varepsilon^3 \quad \text{при } \varepsilon \in (0, 1/300].$$

Схема S_2 является искомой схемой A.

Пример 10. Константу 1 в базисе $\{x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3, x_1\&x_2, x_1\vee x_2, \bar{x}_1\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Доказательство такое же, как и в примере 9.

Пример 11. Константу 0 в базисе $\{x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3, x_1\&x_2, x_1\vee x_2, \bar{x}_1\}$ можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \leq \varepsilon^2 + 7\varepsilon^3$ при $\varepsilon \in (0, 1/300]$.

Для доказательства данного утверждения достаточно заменить в рассуждениях из примера 9 функцию $\vee$ на $\&$.

2. Нижние оценки ненадежности схем

Приведем вспомогательную лемму, необходимую для поиска нижней оценки ненадежности схем.

Лемма 2 [3]. *Пусть $f(\widetilde{x})$ – произвольная булева функция, отличная от константы, и S – любая схема, ее реализующая в произвольном конечном базисе B. Пусть подсхема C схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию f' с ненадежностью $P(C) \leq 1/2$. Обозначим через p^1 минимум вероятностей ошибок на выходе схемы C по таким входным наборам $\widetilde{c}$, что $f'(\widetilde{c}) = 0$. Аналогично, пусть p^0 – минимум вероятностей ошибок на выходе схемы C по таким входным наборам $\widetilde{c}$, что $f'(\widetilde{c}) = 1$.*

Пусть $\widetilde{a}$ – входной набор функции $f(\widetilde{x})$, тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют условиям:

$$P_1(S, \widetilde{a}) \geq p^1, \quad \text{если} \quad f(\widetilde{a}) = 0,$$
$$P_0(S, \widetilde{a}) \geq p^0, \quad \text{если} \quad f(\widetilde{a}) = 1.$$

Замечание 1 [3]. Из леммы 2 следует, что $P(S) \geq \max\{p^0, p^1\}$.

В случае инверсных неисправностей на входах из леммы 2 и замечания 1 можно вывести ряд следствий.

Пусть в лемме 2 подсхема C схемы S, реализующей булеву функцию $f(\widetilde{x})$, состоит из одного функционального элемента E, реализующего функцию f', зависящую не более чем от двух переменных. Тогда справедливо

Следствие 1. *Если E – конъюнктор, то для него при $\varepsilon \in (0, 1/4]$ вероятности ошибок на выходе равны: $P_1(00) = \varepsilon^2$, $P_0(11) = 2\varepsilon-\varepsilon^2$, $P_1(01) = P_1(10) = \varepsilon-\varepsilon^2$ (при условии, что схема S реализует функцию, отличную от константы 0). Применим лемму 2 и получим: $p^0 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $p^1 = \varepsilon^2$. Тогда согласно замечанию 1 $P(S) \geq 2\varepsilon - \varepsilon^2$.*

В случае, когда схема S реализует константу 0, то согласно лемме 2 $p^0 = 0$, $p^1 = \varepsilon^2$, и тогда в силу замечания 1 для нее $P(S) \geq \varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/4]$.

Следствие 2. *Если E – дизъюнктор, то он реализует функцию, двойственную функции из следствия 1, поэтому для него: $P(S) \geq 2\varepsilon-\varepsilon^2$ (при условии, что схема S реализует функцию, отличную от константы 1). Соответственно, в случае, когда схема S реализует константу 1, для нее $P(S) \geq \varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/4]$.*

Следствие 3. *Если E – импликатор, то для него при $\varepsilon \in (0,1/4]$ вероятности ошибок на выходе равны: $P_0(00) = \varepsilon - \varepsilon^2$, $P_0(01) = \varepsilon^2$, $P_1(10) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$ (при условии, что схема S реализует функцию, отличную от константы 1). Применим лемму 2 и получим: $p^1 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $p^0 = \varepsilon^2$. Тогда согласно замечанию 1 $P(S) \geq 2\varepsilon - \varepsilon^2$.*

В случае, когда схема S реализует константу 1, то согласно лемме 2 $p^1 = 0$, $p^0 = \varepsilon^2$, и тогда из замечания 1 для этой схемы следует, что $P(S) \geq \varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0,1/4]$.

Следствие 4. *Если E – антиимпликатор, то он реализует функцию, двойственную функции из следствия 3,, поэтому для него $P(S) \geq 2\varepsilon - \varepsilon^2$ (при условии, что схема S реализует функцию, отличную от константы 0). Соответственно, в случае, когда схема S реализует константу 0, для нее $P(S) \geq \varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0,1/4]$.*

Следствие 5. *Если E реализует эквиваленцию, то для него при $\varepsilon \in (0,1/4]$ вероятности ошибок на выходе равны: $P_0(00) = P_0(11) = P_1(01) = P_1(10) = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. Применим лемму 2 и получим: $p^1 = p^0 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$. Тогда согласно замечанию 1 $P(S) \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.*

Следствие 6. *Если E – сумматортор, то он реализует функцию, двойственную функции из следствия 5, поэтому для него $P(S) \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0,1/4]$.*

Следствие 7. *Если E – инвертор, то для него при $\varepsilon \in (0,1/4]$ вероятности ошибок на выходе равны: $P_0(0) = P_1(1) = \varepsilon$. Применим лемму 2 и получим: $p^1 = p^0 = \varepsilon$. Тогда согласно замечанию 1 $P(S) \geq \varepsilon$.*

Следствие 8. *Если E реализует штрих Шеффера, то для него при $\varepsilon \in (0,1/4]$ вероятности ошибок на выходе равны: $P_0(00) = \varepsilon^2$, $P_1(11) = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, $P_0(01) = P_0(10) = \varepsilon - \varepsilon^2$ (при условии, что схема S реализует функцию, отличную от константы 1). Применим лемму 2 и получим: $p^1 = 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, $p^0 = \varepsilon^2$. Тогда согласно замечанию 1 $P(S) \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.*

В случае, когда схема S реализует константу 1, то согласно лемме 2 $p^1 = 0$, $p^0 = \varepsilon^2$, и тогда в силу замечания 1 для нее $P(S) \geq \varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0,1/4]$.

Следствие 9. *Если E реализует стрелку Пирса, функцию, двойственную функции из следствия 8, то для него $P(S) \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$ (при условии, что схема S реализует функцию, отличную от константы 0). Соответственно, в случае, когда схема S реализует константу 0, то для нее $P(S) \geq \varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0,1/4]$.*

Следствие 10. *Если E – элемент голосования, то для него при $\varepsilon \in (0,1/4]$ вероятности ошибок на выходе равны: $P_1(000) = P_0(111) = 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$, $P_1(001) = P_1(010) = P_0(011) = P_1(100) = P_0(101) = P_0(110) = 2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3$. Применим лемму 2 и получим: $p^1 = p^0 = 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$. Тогда (по замечанию 1): $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.*

Лемма 3. *Пусть $\varepsilon \in (0,1/4]$, $f(\widetilde{x})$ – булева функция, $f \neq 1$, x_i, $i = 1, \ldots, n$, и S – любая схема, реализующая $f(\widetilde{x})$ в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1|x_2\}$. Тогда $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.*

Справедливость леммы 3 следует из следствий 8, 10.

Используя следствия 1–10, найдем в каждом из рассматриваемых базисов нижнюю оценку ненадежности схем.

Очевидно, что функции x_1, x_2, …, x_n в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1|x_2\}$ можно реализовать абсолютно надежно, а константу 1 – с ненадежностью не менее ε^2 (следствие 8).

Лемма 4. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 0, 1$, x_i, $i = 1, \ldots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 4 следует из следствий 3, 4, 10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$ можно реализовать абсолютно надежно, константы 0 и 1 – с ненадежностью не менее ε^2 при $\varepsilon \leq 1/4$ (следствия 3, 4).

Лемма 5. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 1$, x_i, $i = 1, \ldots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 5 следует из следствий 3, 6, 10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2\}$ можно реализовать абсолютно надежно, константу 1 – с ненадежностью не менее ε^2 при $\varepsilon \leq 1/4$ (следствие 3).

Лемма 6. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 0$, x_i, $i = 1, \ldots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \oplus x_2, x_1 \& x_2, 1\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 6 следует из следствий 1, 6, 10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n и константу 1 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \oplus x_2, x_1 \& x_2, 1\}$ можно реализовать абсолютно надежно, константу 0 – с ненадежностью не менее ε^2 при $\varepsilon \leq 1/4$ (следствие 1).

Лемма 7. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 0$, x_i, $i = 1, \ldots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 7 следует из следствий 1, 5, 6, 10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$ можно реализовать абсолютно надежно, константу 0 – с ненадежностью не менее ε^2 при $\varepsilon \leq 1/4$ (следствие 1).

Лемма 8. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 0$, x_i, $i = 1, \ldots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, 0\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 8 следует из следствий 1, 5, 10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n и константу 0 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, 0\}$ можно реализовать абсолютно надежно.

Лемма 9. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 1$, x_i, $i = 1, \ldots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, \bar{x}_1\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 9 следует из следствий 3, 7, 10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, \bar{x}_1\}$ можно реализовать абсолютно надежно, константу 1 – с ненадежностью не менее ε^2 при $\varepsilon \leq 1/4$ (следствие 3).

Лемма 10. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 1$, x_i, $i = 1, \ldots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, 0\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 10 следует из следствий 3, 10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n и константу 0 в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \to x_2, 0\}$ можно реализовать абсолютно надежно, константу 1 – с ненадежностью не менее ε^2 при $\varepsilon \leq 1/4$ (следствие 3).

Лемма 11. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 1, x_i$, $i = 1, \dots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 11 следует из следствий 2, 7, 10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ можно реализовать абсолютно надежно, константу 1 – с ненадежностью не менее ε^2 при $\varepsilon \leq 1/4$ (следствие 2).

Лемма 12. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 0, 1, x_i$, $i = 1, \dots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 12 следует из следствий 1, 2, 7, 10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n в базисе $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ можно реализовать абсолютно надежно, константы 0 и 1 – с ненадежностью не менее ε^2 при $\varepsilon \leq 1/4$ (следствие 1, 2).

Лемма 13. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция,* $f \neq 0, 1, x_i$, $i = 1, \dots, n$, *и* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $M \bigcup \{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3\}$. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3$.

Справедливость леммы 13 следует из следствий 1–10.

Очевидно, что функции x_1, x_2, ..., x_n и константы 0 и 1 в базисе $M \bigcup \{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3\}$ можно реализовать абсолютно надежно.

Поскольку ненадежности двойственных схем при инверсных неисправностях на входах элементов равны [3], то доказанные утверждения (леммы 3–12) справедливы в базисах, двойственных рассмотренным базисам для двойственных функций.

Таким образом, получен следующий результат.

Пусть B' – один из базисов $B_1 - B_{18}$, M, к которому добавили функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Для него справедлива теорема 4.

Теорема 4. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/4]$, $f(\widetilde{x})$ *– булева функция, отличная от функций* x_i, $i = 1, \dots, n$, *и констант* 0, 1, *а* S *– любая схема, реализующая* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* B'. *Тогда* $P(S) \geq 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2$.

Из теоремы 4 следует, что схемы, построенные при доказательстве теоремы 3, и реализующие булевы функции $f(\widetilde{x})$, $f \neq 0, 1, x_i$, $i = 1, \dots, n$, являются асимптотически оптимальными по надежности и функционируют с ненадежностью, асимптотически равной $3\varepsilon^2$ при $\varepsilon \to 0$.

Сравнивая полученные в этой работе результаты (теоремы 3 и 4) с результатами работы [1, 2] (теоремы 1 и 2), приходим к выводу, что при инверсных неисправностях на входах элементов метод повышения надежности схем с помощью элемента голосования позволяет реализовать почти все функции с большей надежностью по сравнению с методом повышения надежности схем, рассмотренным в работах [1, 2].

Summary

V.V. Chugunova. About Circuit Reliability in Full Bases, Containing a Vote Function with Input Inverse Failures.

The paper considers Boolean functions to be realized by circuits of reliable functional elements being prone to input failures with fault probability ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, on any functional element input. It is shown that if to each of non-reducible full bases containing functions with at most two variables there will be added a vote function, then a reliability estimate of asymptotically optimal reliable circuits is equal $3\varepsilon^2$ (with $\varepsilon \to 0$) for all Boolean functions $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ except for constants 0, 1 and functions x_i, $\bar{x}_i$, where $i = 1, \ldots, n$.

Key words: Boolean functions, asymptotically optimal reliable circuits.

Литература

1. *Чугунова В.В.* Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем при инверсных неисправностях на входах элементов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Пенза, 2007. – 110 с.

2. *Чугунова В.В.* О надежности схем в некоторых приводимых полных базисах // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-матем. науки. – 2007. – № 2. – С. 25–37.

3. *Алехина М.А.* Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов. – Пенза: Инф.-изд. центр ПГУ, 2006. – 157 с.

Поступила в редакцию
21.02.09

Чугунова Варвара Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики Пензенского государственного университета.

E-mail: *burchug@sura.ru*